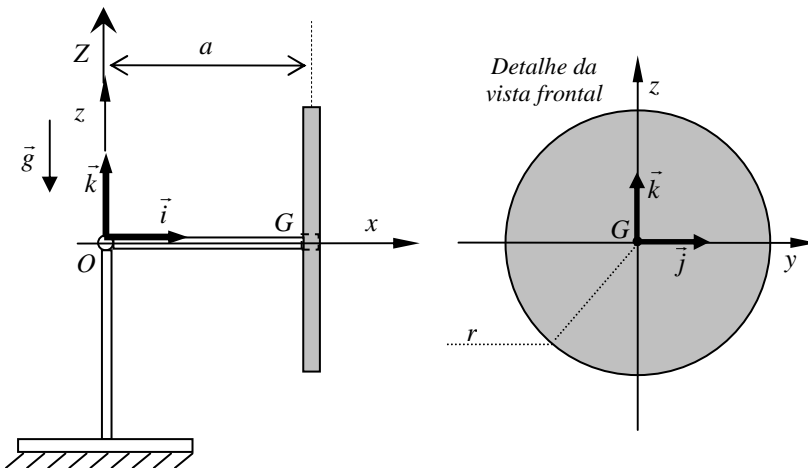




**MECÂNICA II - PME 3200 – Primeira Prova – 10 de abril de 2018**

Duração da prova: 110 minutos (não é permitido o uso de celulares, notebooks e dispositivos similares)



**1ª Questão (3,0 pontos).** Na figura ao lado, a haste delgada  $OG$ , de massa desprezível, está articulada em  $O$  a um suporte vertical. Um disco homogêneo, de raio  $r$  e massa  $m$ , está acoplado à extremidade  $G$  por meio de um mancal, podendo assim girar livremente em relação à haste  $OG$ . O disco gira com velocidade angular  $|\omega_1| = const$  em torno do eixo  $Ox$ , enquanto a haste gira com velocidade angular  $|\omega_2| = const$  em torno do eixo vertical fixo  $OZ$ , alinhado com a direção do campo gravitacional local. Destaca-se que o sistema de

referência  $Oxyz$  é solidário à haste  $OG$ . Pedese:

- determinar o vetor rotação absoluta do disco;
- determinar a matriz de inércia do disco expressa no referencial solidário à haste e com origem em  $G$ ;
- expressar o momento da quantidade de movimento (quantidade de movimento angular) do disco com respeito ao pólo  $G$  no sistema de referência  $Oxyz$ ;
- aplicando o Teorema do Momento da Quantidade de Movimento (ou da Quantidade de Movimento Angular) ao disco, com respeito ao pólo  $G$ , determinar o binário giroscópico ativo;
- determinar a velocidade angular própria do disco ( $\omega_1$ ) compatível com o movimento descrito, supondo-se que a velocidade angular da haste em torno do eixo vertical  $OZ$  seja conhecida e constante;
- classificar o tipo de movimento exibido pelo disco.

**RESOLUÇÃO**

O vetor rotação absoluta do disco, é:

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{i} + \omega_2 \vec{k}$$

**Resposta (a): ½ ponto**

A matriz de inércia do disco, no pólo  $G$ , é:

$$[J]_{Gxyz} = \begin{bmatrix} \frac{mr^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mr^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mr^2}{4} \end{bmatrix}$$

**Resposta (b): ½ ponto**

O momento da quantidade de movimento do disco, com respeito ao pólo  $G$ , expresso no referencial  $Oxyz$  ligado à haste, é:



$$\vec{H}_G = [J]_{Gxyz} [\omega] = \begin{bmatrix} \frac{mr^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mr^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mr^2}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_1 \\ 0 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \frac{mr^2}{2} \omega_1 \vec{i} + \frac{mr^2}{4} \omega_2 \vec{k}$$

Resposta (c): ½ ponto

A aceleração do centro de massa do disco, é:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_O + \dot{\omega}_2 \vec{k} \wedge (G-O) + \omega_2 \vec{k} \wedge [\omega_2 \vec{k} \wedge (G-O)] = \vec{0} + \vec{0} \wedge (G-O) + \omega_2 \vec{k} \wedge (\omega_2 \vec{k} \wedge a \vec{i}) = -\omega_2^2 a \vec{i}$$

O Teorema do Movimento do Baricentro, aplicado ao disco, se expressa como:

$$\vec{R} = m \vec{a}_G.$$

Tomando-se em conta o diagrama de corpo livre do disco (figura ao lado), em que as forças são indicadas por setas pretas simples e os binários por setas verdes duplas, tem-se:

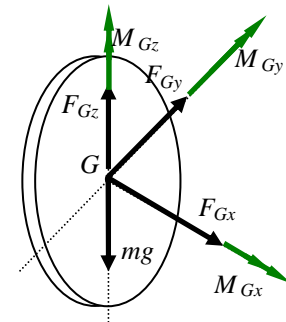
$$F_{Gx} \vec{i} + F_{Gy} \vec{j} + F_{Gz} \vec{k} - mg \vec{k} = m \vec{a}_G = -m \omega_2^2 a \vec{i},$$

de onde se conclui que as componentes da reação aplicada pela barra ao disco, são:

$$F_{Gx} = -m \omega_2^2 a$$

$$F_{Gy} = 0$$

$$F_{Gz} = mg$$



O Teorema do Momento da Quantidade de Movimento (ou da Quantidade de Movimento Angular), com respeito ao pólo G, se expressa como:

$$\vec{M}_G = \dot{\vec{H}}_G |_{OXYZ},$$

em que  $\vec{M}_G$  é a resultante do sistema de forças externas aplicadas ao disco e  $\dot{\vec{H}}_G |_{OXYZ}$  é o binário giroscópico ativo.

Considerando-se o diagrama de corpo livre do disco, tem-se:

$$M_{Gx} \vec{i} + M_{Gy} \vec{j} + M_{Gz} \vec{k} = \frac{mr^2}{2} \omega_1 \omega_2 \vec{j}$$

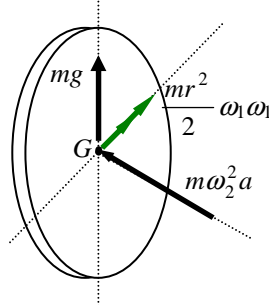
de onde se conclui que as componentes do binário aplicado pela barra ao disco, são:

$$M_{Gx} = 0$$

$$M_{Gy} = \frac{mr^2}{2} \omega_1 \omega_2$$

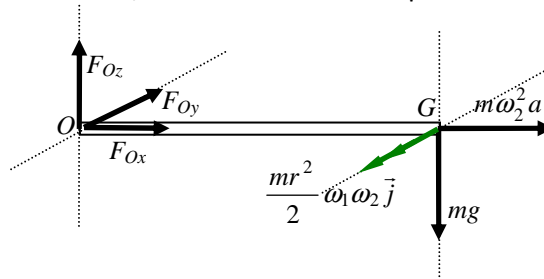
$$M_{Gz} = 0$$

No diagrama de corpo livre do disco desenhado abaixo, indicam-se, com seus valores corretos, as forças e binários externos aplicados ao disco pela barra:



**Resposta (d): ½ ponto**

Na figura abaixo, desenha-se o diagrama de corpo livre da barra, adotando-se, para tanto, as mesmas convenções utilizadas nos diagramas anteriores. Observe-se que o sistema de forças de origem inercial agentes na barra é desprezível, pois, de acordo com o enunciado, a massa da barra é desprezível.



Levando-se em conta o exposto acima, o Teorema da Resultante fornece:

$$\vec{R} = m_{barra} \vec{a}_{Gbarra} = \vec{0},$$

ou seja:

$$F_{Ox} + m\omega_2^2 a = 0 \Rightarrow F_{Ox} = -m\omega_2^2 a$$

$$F_{Oy} = 0$$

$$F_{Oz} - mg = 0 \Rightarrow F_{Oz} = mg$$

Analogamente, o Teorema do Momento da Quantidade de Movimento, com respeito ao pólo O, fornece:

$$\vec{M}_O = \dot{\vec{H}}_O|_{OXYZ} = \vec{0},$$

ou seja:

$$(G-O) \wedge (-mg\vec{k}) - \frac{mr^2}{2} \omega_1 \omega_2 \vec{j} = \vec{0} \Rightarrow a\vec{i} \wedge (-mg\vec{k}) - \frac{mr^2}{2} \omega_1 \omega_2 \vec{j} = \vec{0} \Rightarrow mga - \frac{mr^2}{2} \omega_1 \omega_2 = 0$$

Da equação acima, concluímos que o movimento descrito pelo disco é possível desde que a sua velocidade angular própria seja

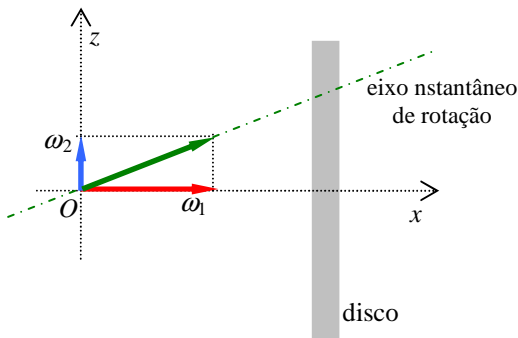
$$\omega_1 = \frac{2ga}{r^2 \omega_2}$$

**Resposta (e): ½ ponto**

A abordagem adotada nos parágrafos anteriores para se responder a questão 'e' baseou-se na análise do movimento de dois corpos distintos: disco girando em torno de uma barra horizontal de massa desprezível que, por sua vez, gira em torno de um eixo vertical fixo.



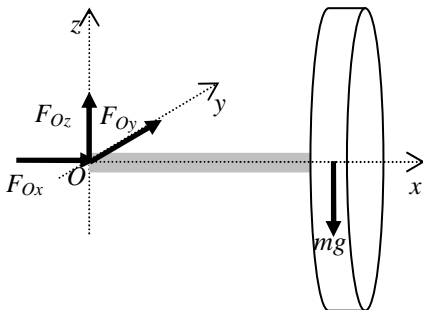
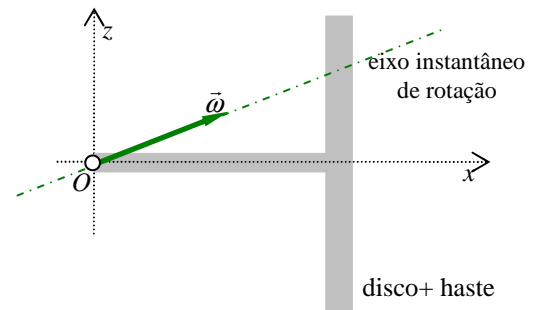
A mesma questão 'e' pode ser resolvida adotando-se uma abordagem alternativa, conforme explicaremos nos parágrafos seguintes.



Notemos, inicialmente, que o disco realiza movimento de rotação em torno de um ponto fixo – no caso, o ponto  $O$ . O sistema de vetores rotação que gera o movimento do disco é concorrente em  $O$  e o eixo instantâneo de rotação do disco passa por esse ponto (vide figura à esquerda).

Além disso, é importante lembrar que, de acordo com o enunciado do problema, a massa da barra  $OG$  é desprezível.

As condições anteriores nos permitem resolver o problema a partir da análise do movimento de um corpo rígido único ideal, em torno do ponto fixo  $O$ : esse corpo ideal, com centro de massa em  $G$ , é o disco ligado rigidamente à haste  $OG$  – (vide figura à direita), doravante referido apenas como 'disco+haste'.



O movimento do 'disco+haste' realiza-se sob a ação do sistema de forças externas indicadas no diagrama de corpo livre à esquerda.

Nessas condições, o Teorema da Resultante se escreve como:

$$F_{Ox}\vec{i} + F_{Oy}\vec{j} + F_{Oz}\vec{k} - mg\vec{k} = m\vec{a}_G = -m\omega_2^2 a\vec{i},$$

de onde resulta:

$$F_{Ox} + m\omega_2^2 a = 0 \Rightarrow F_{Ox} = -m\omega_2^2 a$$

$$F_{Oy} = 0$$

$$F_{Oz} - mg = 0 \Rightarrow F_{Oz} = mg$$

Nas mesmas condições, o Teorema do Momento da Quantidade de Movimento, com respeito ao pólo  $O$ , se escreve como:

$$\vec{M}_O = \frac{d\vec{H}_O}{dt} \Big|_{OXYZ} = \frac{d\vec{H}_O}{dt} \Big|_{Oxyz} + \omega_2\vec{k} \wedge \vec{H}_O = \omega_2\vec{k} \wedge \vec{H}_O = (G-O) \wedge (-mg\vec{k}) = a\vec{i} \wedge (-mg\vec{k}) = mga\vec{j}$$

Lembrando que o momento da quantidade de movimento do corpo ideal 'disco+haste', com respeito ao pólo  $O$ , é dado por:

$$\vec{H}_O = \vec{H}_G + (G-O) \wedge m\vec{v}_G = \frac{mr^2}{2} \omega_1\vec{i} + \frac{mr^2}{4} \omega_2\vec{k} + a\vec{i} \wedge m\vec{v}_G$$

e que

$$\vec{v}_G = \vec{v}_O + (\omega_1\vec{i} + \omega_2\vec{k}) \wedge a\vec{i} = \omega_2 a\vec{j}$$



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
Departamento de Engenharia Mecânica

resulta

$$\vec{H}_O = \frac{mr^2}{2} \omega_1 \vec{i} + \frac{mr^2}{4} \omega_2 \vec{k} + a \vec{i} \wedge m \omega_2 a \vec{j} = \frac{mr^2}{2} \omega_1 \vec{i} + \left( \frac{mr^2}{4} \omega_2 + ma^2 \omega_2 \right) \vec{k}$$

Substituindo-se a expressão de  $\vec{H}_O$  na do Teorema do Momento da Quantidade de Movimento, obtém-se:

$$\omega_2 \vec{k} \wedge \left[ \frac{mr^2}{2} \omega_1 \vec{i} + \left( \frac{mr^2}{4} \omega_2 + ma^2 \omega_2 \right) \vec{k} \right] = mga \vec{j} \Rightarrow \frac{mr^2}{2} \omega_1 \omega_2 = mga,$$

em que o termo  $\frac{mr^2}{2} \omega_1 \omega_2 \vec{j}$  é o 'binário giroscópico ativo'.

**Método alternativo. Resposta (d) ½ ponto**

Vê-se, portanto, que esta segunda abordagem do problema conduz ao mesmo resultado obtido anteriormente: o disco deve girar com velocidade angular própria

$$\omega_1 = \frac{2ga}{r^2 \omega_2}$$

para que o movimento descrito no enunciado do problema seja possível.

**Método alternativo. Resposta (e): ½ ponto**

Nas condições indicadas no enunciado do problema, o disco realiza movimento de precessão estacionária regular em torno do eixo vertical OZ.

**Resposta f: ½ ponto**

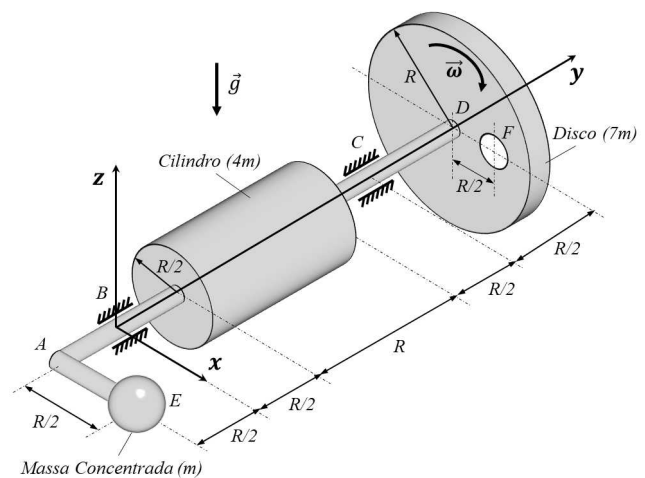


**2ª Questão (4,0 pontos).** O **corpo rígido** indicado na figura é composto por: **(i)** um eixo  $ABCD$ , de comprimento  $3R$  e massa desprezível; **(ii)** um cilindro de raio  $R/2$ , comprimento  $R$  e massa  $4m$ ; **(iii)** um disco de espessura desprezível, raio  $R$  e massa  $7m$ , no qual existe um furo de raio  $R/6$  localizado na posição indicada na figura; **(iv)** uma massa concentrada  $m$ , unida ao eixo  $ABCD$  por uma haste de comprimento  $R/2$  e massa desprezível. O sistema rígido descrito gira em torno do eixo  $By$  com velocidade angular  $\vec{\omega} = \omega \vec{j}$ , constante.

Nota: Admite-se que o torque aplicado ao eixo de rotação varia de forma a se contrapor ao torque ocasionado pela força peso e pelo atrito nos mancais, mantendo a velocidade angular constante.

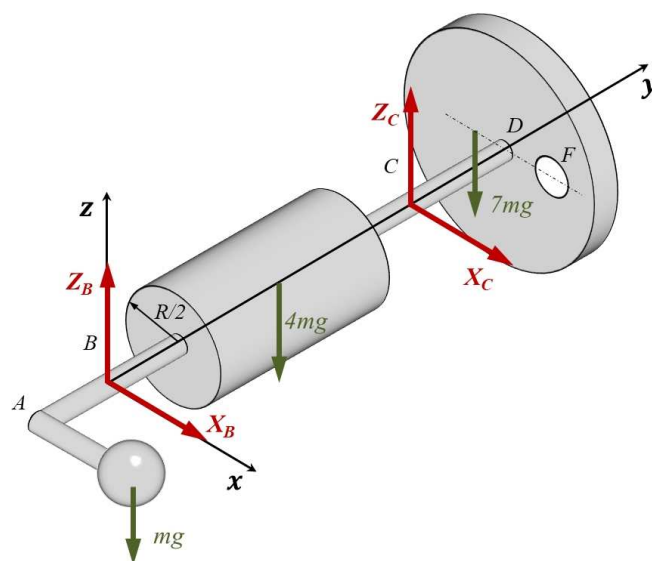
Considerando o sistema de referência  $Bxyz$  solidário ao corpo rígido previamente descrito, pede-se:

- desenhar o diagrama de corpo livre;
- determinar as coordenadas  $x_G$  e  $z_G$  do centro de massa do corpo, expressas no sistema de referência  $Bxyz$ ;
- determinar os produtos de inércia  $J_{Bxy}$  e  $J_{Byz}$ , expressos no sistema de referência  $Bxyz$ ;
- determinar os valores de duas massas concentradas que devem ser adicionadas em dois pontos pertencentes ao plano  $z = 0$  e localizados na periferia das faces do cilindro ( $y_1 = R/2$  e  $y_2 = 3R/2$ ), de forma a balancear o corpo.



### RESOLUÇÃO

- Desenhar o diagrama de corpo livre



Resposta (a): 1 ponto



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
Departamento de Engenharia Mecânica

(b) Determinar as coordenadas  $x_G$  e  $z_G$  do centro de massa do corpo, expressas no sistema de referência  $Bxyz$ :

- Coordenadas do centro de massa do disco furado ( $x_{G_D}$  e  $z_{G_D}$ ):

Utilizando a definição de centro de massa, as coordenadas  $x_{G_D}$  e  $z_{G_D}$  do disco furado são calculadas, como segue:

$$\begin{aligned}m_D x_{G_D} &= m_D^* x_D - m_F x_F \\m_D z_{G_D} &= m_D^* z_D - m_F z_F\end{aligned}\quad (1)$$

onde  $m_D$  é a massa do disco furado e  $m_D^*$  é a massa do disco sem o furo, ou seja,  $m_D = m_D^* - m_F$ . Como pode ser observado na figura do enunciado, a posição do centro de massa do disco sem o furo, expressa no sistema de referência  $Bxyz$ , é  $(D-B) = (x_D, y_D, z_D) = \left(0, \frac{5}{2}R, 0\right)$ . Já a posição do centro do

furo é dada por  $(F-B) = (x_F, y_F, z_F) = \left(\frac{R}{2}, 5\frac{R}{2}, 0\right)$ . Adicionalmente, a relação entre  $m_D$  e a massa de material removido devido ao furo ( $m_F$ ) é expressa como:

$$\frac{m_D}{m_F} = \left(\frac{R}{R_F}\right)^2 - 1\quad (2)$$

Substituindo os valores de  $m_D$  e  $R_F$ , fornecidos no enunciado, na equação (2), a massa de material removido devido ao furo é dada por:

$$\frac{m_D}{m_F} = 35 \Rightarrow m_F = \frac{m}{5}\quad (3)$$

Finalmente, as coordenadas do centro de massa do disco furado são determinadas substituindo os valores de  $m_F$ ,  $x_F$  e  $z_F$  na Eq. (1):

$$\begin{aligned}(7m)x_{G_D} &= m_D^* \cdot 0 - \left(\frac{m}{5}\right) \cdot \left(\frac{R}{2}\right) \\(7m)z_{G_D} &= m_D^* \cdot 0 - \left(\frac{m}{5}\right) \cdot 0\end{aligned}\quad \Rightarrow x_{G_D} = -\frac{R}{70} \text{ e } z_{G_D} = 0\quad (4)$$

- Coordenadas do centro de massa do corpo rígido ( $x_G$  e  $z_G$ ):

Utilizando a definição de centro de massa, mas agora para o corpo rígido composto pelo disco furado, cilindro e massa concentrada, tem-se:

$$\begin{aligned}(m_D + m_C + m_E)x_G &= m_D x_{G_D} + m_C x_{G_C} + m_E x_E \\(m_D + m_C + m_E)z_G &= m_D z_{G_D} + m_C z_{G_C} + m_E z_E\end{aligned}\quad (5)$$



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
Departamento de Engenharia Mecânica

Substituindo na equação acima os dados fornecidos no enunciado, bem como os resultados obtidos na Eq. (4), tem-se:

$$\begin{aligned}(12m)x_G &= 7m \cdot \left(-\frac{R}{70}\right) + 4m \cdot 0 + m \cdot \frac{R}{2} &\Rightarrow x_G &= \frac{R}{30} \quad \text{e} \quad z_G = 0 \\ (12m)z_G &= 7m \cdot 0 + 4m \cdot 0 + m \cdot 0\end{aligned}\tag{6}$$

**Resposta (b): 1 ponto**

(c) Determinar os produtos de inércia  $J_{Bxy}$  e  $J_{Byz}$ , expressos no sistema de referência  $Bxyz$ .

- Produtos de inércia do disco furado ( $J_{Bxy_D}$  e  $J_{Byz_D}$ ):

Utilizando a propriedade de composição e o teorema dos eixos paralelos para produtos de inércia, os valores de  $J_{Bxy_D}$  e  $J_{Byz_D}$  do disco furado, expressos no sistema de coordenadas  $Bxyz$ , são dados por:

$$\begin{aligned}J_{Bxy_D} &= J_{Bxy_D}^* - J_{Bxy_F} = \left(J_{Dxy_D}^* + m_D^* x_D y_D\right) - \left(J_{Fxy_F} + m_F x_F y_F\right) \\ J_{Byz_D} &= J_{Byz_D}^* - J_{Byz_F} = \left(J_{Dyz_D}^* + m_D^* x_D y_D\right) - \left(J_{Fyz_F} + m_F x_F y_F\right)\end{aligned}\tag{7}$$

onde os termos com asterisco denotam as propriedades do disco sem o furo.

Como o disco sem o furo e o próprio furo são simétricos ( $J_{Dxy_D}^* = J_{Dyz_D}^* = J_{Fxy_F}^* = J_{Fyz_F}^* = 0$ ), a expressão acima é simplificada, conforme indicado abaixo:

$$\begin{aligned}J_{Bxy_D} &= m_D^* x_D y_D - m_F x_F y_F \\ J_{Byz_D} &= m_D^* x_D y_D - m_F x_F y_F\end{aligned}\tag{8}$$

Utilizando o valor da massa de material removido devido ao furo calculada na Eq. (3), bem como as coordenadas dos pontos  $D$  e  $F$ , obtém-se:

$$\begin{aligned}J_{Bxy_D} &= \left(m_D^* \cdot 0 \cdot \frac{5R}{2}\right) - \frac{m}{5} \cdot \frac{R}{2} \cdot \frac{5R}{2} \\ J_{Byz_D} &= \left(m_D^* \cdot \frac{5R}{2} \cdot 0\right) - \frac{m}{5} \cdot \frac{5R}{2} \cdot 0\end{aligned}\quad \Rightarrow J_{Bxy_D} = -\frac{mR^2}{4} \quad \text{e} \quad J_{Byz_D} = 0\tag{9}$$

- Produtos de inércia do corpo rígido ( $J_{Bxy}$  e  $J_{Byz}$ ):

Utilizando a propriedade de composição e o teorema dos eixos paralelos para produtos de inércia, mas agora para o corpo rígido composto pelo disco furado, cilindro e massa concentrada, tem-se:

$$\begin{aligned}J_{Bxy} &= J_{Bxy_D} + J_{Bxy_C} + J_{Bxy_E} \\ J_{Byz} &= J_{Byz_D} + J_{Byz_C} + J_{Byz_E}\end{aligned}\tag{10}$$

Considerando a simetria do cilindro ( $J_{Bxy_C} = J_{Byz_C} = 0$ ), bem como os resultados da Eq. (9) e os demais dados fornecidos no enunciado, tem-se:





ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
Departamento de Engenharia Mecânica

$$J_{Bxy} = -\frac{mR^2}{4} + 0 + m_E x_E y_E = -\frac{mR^2}{4} + m \frac{R}{2} \cdot \left(-\frac{R}{2}\right) \Rightarrow J_{Bxy} = -\frac{mR^2}{2} \text{ e } J_{Byz} = 0 \quad (11)$$
$$J_{Byz} = J_0 + 0 + m_E y_E z_E = m \left(-\frac{R}{2}\right) \cdot 0$$

**Resposta (c): 1 ponto**

(d) Determinar as abscissas  $x_1$  e  $x_2$ , bem como os valores de duas massas concentradas que devem ser adicionadas às faces do cilindro ( $y_1 = R/2$  e  $y_2 = 3R/2$ ), ao longo do plano  $z=0$ , de forma a balancear o conjunto.

- **Balanceamento Estático**

Para balancear estaticamente o corpo rígido, as coordenadas do centro de massa do corpo após a adição das massas de balanceamento ( $x'_G$  e  $z'_G$ ) devem ser nulas. De acordo com o enunciado, as duas massas a serem adicionadas devem estar contidas na periferia das faces do cilindro ( $y_1 = R/2$  e  $y_2 = 3R/2$ ) e no plano  $xy$  ( $z_1 = z_2 = 0$ ), logo:

$$x'_G = 0 \Rightarrow (12m)x_G + m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0 \Rightarrow m_1 x_1 + m_2 x_2 = -\frac{2mR}{5} \quad (12)$$
$$z'_G = 0 \Rightarrow (12m)z_G + m_1 z_1 + m_2 z_2 = 0 \Rightarrow m_1 z_1 + m_2 z_2 = 0 \Rightarrow z_1 = 0 \text{ e } z_2 = 0 \quad (\text{plano } xy)$$

- **Balanceamento Dinâmico**

Para balancear dinamicamente o corpo rígido, os produtos de inércia do corpo após a adição das massas de balanceamento ( $J'_{Bxy}$  e  $J'_{Byz}$ ) devem ser nulos. De acordo com o enunciado, as duas massas a serem adicionadas devem estar contidas na periferia das faces do cilindro ( $y_1 = R/2$  e  $y_2 = 3R/2$ ) e no plano  $xy$  ( $z_1 = z_2 = 0$ ), logo:

$$J'_{Bxy} = 0 \Rightarrow J_{Bxy} + m_1 x_1 y_1 + m_2 x_2 y_2 = 0 \Rightarrow m_1 x_1 y_1 + 3m_2 x_2 y_2 = mR \quad (13)$$
$$J'_{Byz} = 0 \Rightarrow J_{Byz} + m_1 y_1 z_1 + m_2 y_2 z_2 = 0 \Rightarrow m_1 z_1 + 3m_2 z_2 = 0 \Rightarrow z_1 = 0 \text{ e } z_2 = 0 \quad (\text{plano } xy)$$

Considerando as primeiras expressões das Eqs. (12)-(13):

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = -\frac{2mR}{5} \Rightarrow m_1 x_1 = -\frac{11mR}{10} \quad (14)$$
$$m_1 x_1 + 3m_2 x_2 = mR \Rightarrow m_2 x_2 = \frac{7mR}{10}$$

Como as massas de balanceamento devem ser adicionadas (i.e.  $m_1 > 0$  e  $m_2 > 0$ ) na periferia das faces do cilindro no plano  $xy$  (i.e.  $x_1 = \pm \frac{R}{2}$  e  $x_2 = \pm \frac{R}{2}$ ), então:

$$x_1 = -\frac{R}{2} \Rightarrow m_1 = \frac{11m}{5} \quad (15)$$
$$x_2 = \frac{R}{2} \Rightarrow m_2 = \frac{7m}{5}$$



Em resumo, o balanceamento do corpo rígido, nas condições dadas, exige que:

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{11m}{5} & m_2 &= \frac{7m}{5} \\ x_1 &= -\frac{R}{2} & x_2 &= \frac{R}{2} \\ y_1 &= \frac{R}{2} & y_2 &= \frac{3R}{2} \\ z_1 &= 0 & z_2 &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

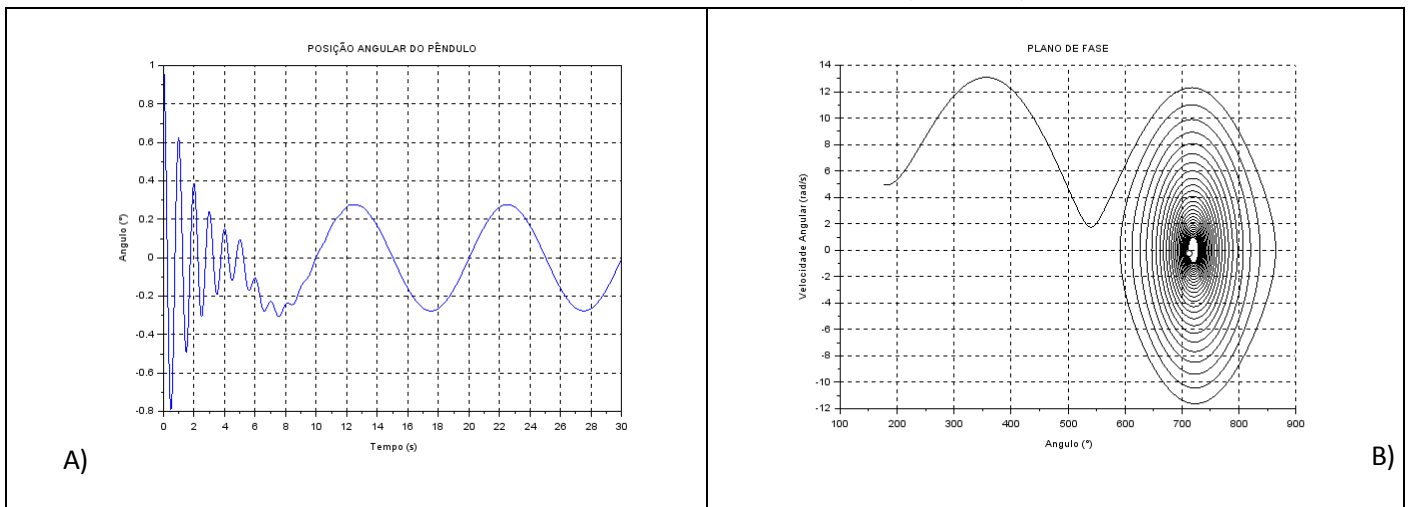
**Resposta (d): 1 ponto**



**ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**  
 Departamento de Engenharia Mecânica

**3ª Questão (3,0 pontos).** Baseados nas simulações sugeridas no EMSC#1 de 2018, os gráficos abaixo apresentam uma história temporal do movimento (resultado A) e da trajetória no plano de fase ( $\theta, \dot{\theta}$ ) do sistema amortecido (resultado B). Dentre as várias condições de simulação (CS) que foram propostas, tem-se:

- CS-1 :  $\theta(0) = \pi/180$  rad;  $\dot{\theta}(0) = 0.0$  rad/s;  $M_o = 0.002$  Nm;  $\omega_m = \omega_n$
- CS-2 :  $\theta(0) = \pi - 0.1$  rad;  $\dot{\theta}(0) = 5.0$  rad/s;  $M_o = 0.0$  Nm;  $\omega_m = \omega_n$
- CS-3 :  $\theta(0) = \pi/180$  rad;  $\dot{\theta}(0) = 0.0$  rad/s;  $M_o = 0.002$  Nm;  $\omega_m = 0.1\omega_n$ .



Identifique para as simulações A e B o respectivo conjunto de condições de simulação (condições iniciais e momento externo). Para tanto, construa uma tabela de correspondência, conforme modelo abaixo, indicando os números que identificam os conjuntos de condições de simulação. Descreva e justifique as respostas.

SIMULAÇÃO	CONDIÇÃO SIMULADA	DESCRIÇÃO E JUSTIFICATIVA
A		
B		

**RESOLUÇÃO**

SIMULAÇÃO	CONDIÇÃO SIMULADA	DESCRIÇÃO E JUSTIFICATIVA	Pontuação
A	CS-3	Nesta simulação o pêndulo inicia seu movimento de forma livre amortecida. A partir do instante 5 segundos, recebe um acionamento do momento externo $M_o = 0.002$ Nm e assume movimento forçado com frequência $\omega_m = 0.1\omega_n$ e amplitude constante.	<b>1 ½ ponto</b>
B	CS-2	Nesta simulação o pêndulo tem velocidade angular inicial $\dot{\theta}(0) = 5.0$ rad/s, percorre uma volta completa e oscila de forma livre em torno da posição angular $\theta = 720^\circ$ com amplitude decrescente devido ao amortecimento.	<b>1 ½ ponto</b>



**4ª Questão (1,0 ponto).** Pode-se afirmar que o momento da quantidade de movimento de um corpo rígido no pólo  $G$  (baricentro) tenha sempre a direção do vetor rotação absoluta do corpo? Justifique exemplificando.

### RESOLUÇÃO

Para um corpo rígido que realiza movimento o mais geral possível, os vetores rotação instantânea ( $\vec{\omega}$ ) e momento da quantidade de movimento no baricentro ( $\vec{H}_G$ ) somente serão paralelos em circunstâncias especiais, as quais serão logo apresentadas.

Na figura ao lado,  $OXYZ$  é um sistema de referência fixo no espaço e  $Gxyz$  é um sistema de referência fixo no corpo. Admite-se que  $Gx$ ,  $Gy$  e  $Gz$  são eixos principais de inércia do corpo.

Dessa forma, os vetores rotação instantânea e momento da quantidade de movimento do corpo com respeito ao pólo  $G$ , são dados, respectivamente, por:

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

e

$$\vec{H}_G = \begin{bmatrix} J_{Gx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{Gy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{Gz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = J_{Gx} \omega_x \vec{i} + J_{Gy} \omega_y \vec{j} + J_{Gz} \omega_z \vec{k}$$

É fácil perceber que esses dois vetores não são, em geral, paralelos, pois, para tanto, seria necessário que

$$\vec{H}_G = \lambda \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \lambda \omega_x \vec{i} + \lambda \omega_y \vec{j} + \lambda \omega_z \vec{k}$$

o que não ocorre em geral, mas pode ocorrer em determinadas circunstâncias, conforme será mostrado a seguir.

**½ ponto**

Caso o elipsóide de inércia do corpo, no seu baricentro, seja uma esfera – como ocorre com esferas, cubos e tetraedros homogêneos, por exemplo,

$$J_{Gx} = J_{Gy} = J_{Gz} = J$$

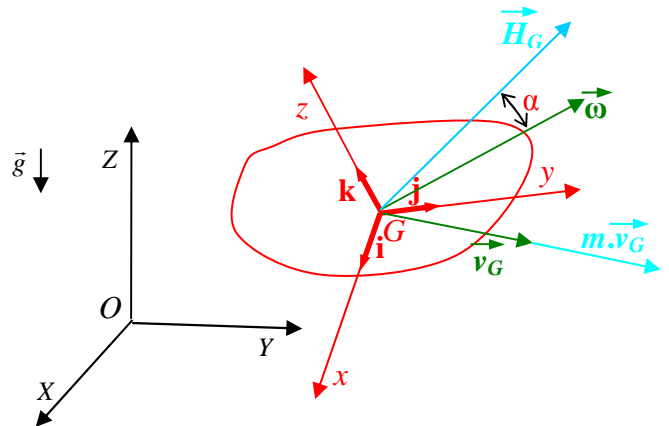
e, portanto,

$$\vec{H}_G = J(\omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}) \text{ é paralelo a } \vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}.$$

No caso de o corpo realizar um movimento de rotação em torno de um dos eixos principais de inércia (por exemplo, o eixo  $z$ ), tem-se:

$$\vec{\omega} = \omega_z \vec{k}$$

e





$$\vec{H}_G = \begin{bmatrix} J_{Gx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{Gy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{Gz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix} = J_{Gz} \omega_z \vec{k} \text{ é paralelo a } \vec{\omega} = \omega_z \vec{k}$$

Como os eixos passantes pelo centro de massa de esferas, cubos e tetraedros homogêneos são eixos principais de inércia desses corpos, pode-se estabelecer, como regra geral, que:

‘Se um corpo realiza um movimento de rotação em torno de um de seus eixos principais de inércia, os vetores rotação instantânea ( $\vec{\omega}$ ) e momento da quantidade de movimento no baricentro  $G$  ( $\vec{H}_G$ ) estão alinhados. É por essa razão que se diz que *os eixos principais de inércia de um corpo são eixos permanentes de rotação*.

**½ ponto**